数理解析研究所講究録
15巻1966年21-29

Nonlinear scattering

京都大学理学部　池　部　晃　生

§1. 序　，文　献

一般に時間的に変化する物理系の状態は，ある微分方程式に関連した Cauchy 問題の解として表わされる。例えば，その微分方程式が

$$(1.1)\qquad \frac{d}{dt}\varphi = A\varphi$$

であったとしよう。ここにφは一般に無限次元 vector space の値をとる時間 t の函数であり，A はこの vector space で働らく作用素で，t に依存しても構わない。A はこの系を characterize するものと見られる。今この系に何らかの理由で perturbation が加えられ，系を記述する作用素が A＋T になったと仮定しよう。すると問題の微分方程式は

$$(1.2)\qquad \frac{d}{dt}\varphi = A\varphi + T\varphi$$

となる。ここで A も T も特に linear であるというようなことは仮定していない。

さて (1.1) 及び (1.2) に関する Cauchy 問題 ― 例えば (1.1) において $t=t_0$ における値を与えて (1.1) を満足する解を求めること ― が unique な解をもつとしよう。そこで u(t) を (1.1) のある解として次の条件を満す (1.2) の解 v(t) を求める問題を考えよう：
初期条件

$$(1.3)\qquad u^{(s)}(t)\,|_{t=s} = v(s)$$

を満す (1.1) の解 $u^{(s)}(t)$ が $s\to\infty$ のとき u(t) に収束する。この問題は∞における Cauchy 問題といつてもよいであろう。すなわち $t\to\infty$ のとき u(t) となるような (1.2) の解 v(t) を求めることであると。しかしここで収束という言葉を使つたが，我々の vector space の topology については何もいつていないのであるから，上の"収束"は適当な意味で収束が定義されているとしての話である。この問題が解けたとすれば u によつて v が定まることになるのであるから，これを

$$(1.4)\qquad v = W_+ u$$

と書いて，W_+ を wave operator と呼ぶことにする。(1.4) において，時間 t が explicit に書かれていないことに注意していただきたい。W_+ は (1.1) の解のつくる空間から，(1.2) の解のつくる空間への作用素 — 一般に nonlinear — である。同じ問題を (1.3) を満す解 $u^{(s)}(t)$ が $s \to -\infty$ のとき $u(t)$ に収束するように $v(t)$ を定めよ，といい直せば，u をこの v に移す作用素として W_- が定義される。W_- も wave operator と呼ばれる。

以上のように $W_\pm$ が得られたならば，scattering operator S を $S = W_+^{-1} W_-$（定義されたとして）とすれば，この S が (1.2) によって characterize される系の（(1,1) によって characterize される系に対して relative な）散乱を記述するということになるわけである。

上では微分方程式を出発点として考えたが，それよりむしろ propagator を使う方が自然かも知れない。例えば (1,1) の解 $u(t)$ の時刻 s における値 $u(s)$ を時刻 t における値 $u(t)$ に移す作用素 $U(t,s)$：$u(t) = U(t,s)\,u(s)$ を考えよう。この $U(t,s)$ は次の関係を満足する。

$$(1.5)\qquad U(t,t) = I \quad (\text{恒等作用素}) .$$

$$(1.6)\qquad U(t,r)\,U(r,s) = U(t,s) \qquad (t \geq r \geq s) ,$$

$$(1.7)\qquad U(s,t) = U(t,s)^{-1} .$$

一般に (1.5)，(1.6) を満すものを propagate と呼んでいる。(1.7) は Cauchy 問題がどちら向き（時間の増える向き及び減る向き）にでも解けることを示している。応用上現われる作用素 A は微分作用素などのように有界でない場合が屢々であり，従ってどんな初期値に対してでも (1.1) が解けるということは先ず期待できない。それにひきかえ $U(t,s)$ は空間全体で定義されていることが多い。このような場合には，系を characterize するものとして $U(t,s)$ の方をより本質的であると見做す方が自然であろうし，また便利なことが多い。

(1.2) に対応しては，別の propagator $V(t,s)$ が存在する。さて前に述べた ∞ における Caucly 問題は次のようになる。$u(t)$ を propagator $U(t,s)$ に従う：$u(t) =$

$U(t,s)\,u(s)$,函数とするとき，$V(t,s)$ に従う函数 $v(t)$ を，

$$(1.8) \qquad U(t,s)\,V(s,t)\,v(t) \to u(t) \qquad (s \to \infty)$$

となるように，求めよ。従って (1.4) の W_+ に相当するものは

$$(1.9) \qquad \lim_{s\to\infty} V(t,s)\,U(s,t)$$

であることは直ちにわかる（(1.4) では t が suppress されており，(1.9) ではそうでない違いはあるが）。

次に文献を挙げる（順序は不規則）

[1] W.A. Strauss: Scattering for hyperbolic equations, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 13-37.

[2] F. Browder & W.A. Strauss: Scattering for nonlinear wave equations, Pacif. J. Math. 13 (1963), 23-24.

[3] I. E. Segal: Nonlinear semigroups. Ann. Math. 78 (1963) 339-364.

[4] Proceedings of symposia in applied mathematics, Vol. 17 (1965), Applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics.

[5] J.B. Keller: On solutions of nonlinear wave equations, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 523-520.

[6] K. Jörgens: Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klassc nichtlinearer Wellengleichungen, Math. Zeitschr., 77 (1961), 295-308.

[7] F. Browder: On nonlinear wave equations, Math. Zeitschr., 80 (1962), 249-264.

[8] I.E. Segal: The global Cauchy problem for a scalar field with power interaction, Bull, Soc. Math.

France, 91 (1963), 129-135.
[9] J.L. Lions & W.A. Strauss: Some nonlinear evolution equations, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 43-96.

上の文献の中，直接 nonlinear scattering を取扱っているのは [1]，[2]，[3] である。取扱いの基本的な考え方にはあまり差は見受けられないようであるから，後に [1] に沿って（その一部分を大雑把に）紹介する。scattering を考察するのには解の存在などは仮定して（無限遠での Cauchy 問題は別）話を進めてもよいように思われるが，解の存在──特に global な── が深く関係していることは明白であろう。その意味で波動方程式 type の非線型方程式に関するものを多少挙げておいた。[1]，[2]，[3] の他に [5]，[6]，[7]，[8] などがそれである。特に [5] － [8] では方程式

$$(1.10) \qquad \Box\varphi = m^2\varphi + g^2\varphi^3 , \quad \Box = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \text{D'Ambertion}$$

あるいは（1，10）を特別の場合として含むような方程式について研究が行われている。これらについては [4] の中の I.E. Segal: Nonlinear partial differential equations in quantum field theory に綜合的な解説があり，また多くの文献も収められている。[4] は題名が示すように，非線偏微分方程式に関する topics を集めたものであるが，念の為内容の大別を述べると：

Ⅰ. General nonlinear theory

Ⅱ. Finite elasticity, compressible fluids

Ⅲ. Viscous fluids, magnetohydrodynamics

Ⅳ. General relativity, quantum field theory

となっている。この proceedings には直接散乱を扱ったものは少ないようであるが，関連のあるものはⅠ，Ⅳ などにある。

（1.1）のような方程式は一般に発展方程式と呼ばれているが，非線型発展方程式は最近多くの人々の関心を集めているようで，その一つとして [9] を挙げておいた。[4]，Ⅰには，T. Kato: Nonlinear evoltion equations in Banach spaces がある。詳細な文献はこれらを参照されたい。なお発展方程式については Strauss の The initial value problem for certain nonlinear evolution equations と

Evolution equations with nonlinear leading termsとがpreprintとしてStanford大学から出ている。その他〔1〕から〔9〕までの文献の著者達は何れもこの方面に関心をもっているであろうから，その後の発展で未発表のものについては，著者自身等が参考文献（？）であろう。

§2においてはperturbationがtime dependentな場合を，§3においてはtime independentな場合を述べる。理論の適用範囲，応用例については前述を参照されたい。

§2. Admissible perturbations

KをHilbert空間とし，その内積を（ , ），normを‖ ‖で表わす。u(t)をKに値をとるt($-\infty<t<\infty$)の函数として，方程式

$$\frac{d}{dt}u = iAu \tag{2.1}$$

を考えよう。AはKでの自己共役作用素である。（Strauss〔1〕は2階の方程式を扱っているが，簡単のため1階の場合を扱う。(2.1)に形式的に$\frac{d}{dt}$を作用させれば$du/dt = -A^2u$となって，彼が取扱った方程式になる。）

$H_0 = H_0(K, A)$を次の性質を満たすtのK−値函数u_0の全体とする：(a) u_0は強絶対連続で殆んどいたる所(a.e)強微分可能；(b) $u_0(0) \in D(A) \equiv A$の定義域；(c) u_0はa.e.で(2.1)を満たす。

u_0, $v_0 \in H_0$とし，tの函数

$$(Au_0(t), Av_0(t)) \tag{2.2}$$

をつくれば，簡単な計算によって，これがtによらない定数であることがわかる。いまA^{-1}が存在して有界である（有界性は必ずしも必要ではない。〔1〕にもこれについての注意があるから参照されたい）とすれば，(2,2)はH_0上のpositive definiteなbilinear formとなり，これを内積としてH_0はHilbert空間になる。これを以後$(u_0, v_0)_{H_0}$と書こう：

$$(u_0, v_0)_{H_0} = (Au_0(t), Av_0(t)), \quad \|u_0\|_{H_0} = (u_0, u_0)_{H_0}^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

u_0，v_0 が $\in H_0$ でなければ (2.2) は定数とはならないが，t の K−値連続函数 f で各 t に対して $f(t) \in D(A)$ となるものの全体 X を考えて

$$(2.4) \qquad \| f \|_X = \sup_t \sqrt{(Af(t), Af(t))}$$

を norm に採用すると，X は Banach 空間になることがわかる。

ここで admissible perturbation の定義を与えよう。T を X の上で定義され，その値域が a.e. の t に対して定義され K に値をもっ函数から成っているような（一般に nonlinear な）作用素としよう。このとき T が admissible であるというのは

(i) $T0 = 0$ a.e., $Tu(t) \in D(A)$ a.e.,

(ii) $Tu(t)$ は t の強可測函数 ($u \in X$)

(iii) $\theta(t)$ をある (fixed) 可積分函数として

$$(2.5) \qquad \| A(Tu(t) - Tv(t)) \| \leq \theta(t) \| A(u(t) - v(t)) \| \qquad (u, v \in X)$$

が成立つ (Lipschitz 条件)，

が満たされていることである。ここで条件 (ii) は計算を進めるために technical な見地から必要なもので乱暴な話をするときには無視してもそれほど支障を来たさない。以後の議論で，それ故，explicit に使われることはないであろう。

さて $u_0 \in H_0$ ならば

$$(2.6) \qquad u_0(t) = e^{iAt} u_0(0)$$

と表わされることに先ず注意しておこう。（A が自己共役だから e^{iAt} は well-defied である)。また $u_0(0) \in D(A)$ ならば H_0 の元はすべてこの形に表わされる。そこで perturbed equation

$$(2.7) \qquad \frac{d}{dt} u = iAu + Tu$$

を考えると，これを積分方程式に変換して論じようというのはすぐに思いつくであろう。ただし我

々は無限遠でのCauchy 問題に関心を持っていることを考慮すれば，考えるべき積分方程式は

$$(2.8)\qquad u = u_0 + Lu ,$$

$$(2.9)\qquad Lu(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{i(t-s)A}(Tu)(s)\,ds$$

となる。ただし $u_0 \in H_0$ ，すなわち (2.1) のある与えられた解である。方程式 (2.8)，(2.9) はBanach 空間Xの中で考える。Tがadmissible であるとすると Lu に関して次の評価が得られる。

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} \| A(Lu-Lv) \|(t) &\leq \int_{-\infty}^{t} \| e^{i(t-s)A} A(Tu(s)-Tv(s)) \|\,ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} \theta(s) \| A(u(s)-v(s) \|\,ds \\ &\leq \| u-v \|_X \int_{-\infty}^{t} \theta(s)\,ds . \end{aligned}$$

また (2.10) においてuの代りにLu，vの代りにLvを入れることによって $\| A(L^2u-L^2v) \|(t)$ の評価が得られるが，一般に

$$(2.11)\qquad \| A(L^nu-L^nv) \|(t) \leq \| u-v \|_X (n!)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{t} \theta(s)\,ds\right)^n$$

従って

$$(2.12)\qquad \| L^nu-L^nv \|_X \leq (n!)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,ds\right)^n \| u-v \|_X$$

が得られる。すなわちnが十分大きければ L^n はLipschitz constant<1のLipschitz 条件を満すことになを。しからば (2.8) の一意解の存在は明らかであろう（逐次近似法）。解の微分可能性などのtechnicalitiesは省略する。

もう一つの無限遠におけるCaucly 問題に対しては，Lu の代りに

$$(2.13)\qquad L_{adv.}u(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{i(t-s)A}Tu(s)\,ds$$

で定義される $L_{adv.}$ をとればよい。

Wave operator $\overline{W}_-$ は (2 .8) , (2 .9) の解 u を用いて $W_- u_0 = u$ と定義すればよい。W_- は H_0 で定義されていて，§ 1 で述べた条件 (1 .3) 式の近傍) を満足することも容易に確かめられる。W_+ も (2 .13) を考慮して同様に定義される。また $W_-(H_0)$ が X の元 u で u′ が a .e , 存在して (2 .7) を満すようなものの全体となるであろうことも期待される。。実際そうなることが示され，W_+ についても同じことがいえる。従って $W_+(H_0) = W_-(H_0)$ が出て，scattering operator S を $S = W_+^{-1} W_-$ によって定義すれば，S が H_0 から H_0 の上へ 1 対 1 写像を与えることが結論される。もっともこのためには $W_\pm$ が H_0 からその値域への 1 対 1 写像でであることを云う必要があるが，これを示すのもそう困難ではない。

以上，admissible perturbation の場合の扱い方を概観した。§ 1 で触れた propagators を使うならば (2 .2) の代りに ($u_0(t)$, $v_0(t)$ を使うのが自然かと思われる。このとき $\overline{W}_\pm$ は H_0 でなく K で定義されるであろう。

§ 3. Time-independent perturbations

ふつう Cauchy 問題については § 1 で述べたように，(1 .10) の如き方程式に関する研究があるが，散乱に関しては (1 .10) そのものを扱ったものも見当らないようである。ここでは 〔1〕に述べられている，方程式

$$(3.1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \Delta\varphi + V(x)\varphi \qquad (\text{ linear !})$$

に対する取扱いを略述する。Δ は $\underset{\sim}{3}$ 次元の Laplacian である。この方法は (1 .10) において $m > 0$ の場合には簡単な modifications では適用されそうには見えない。

先ず (3 .1) を wave equation ($V(2) \equiv 0$ in (3 .1)) の Green 函数 $D(t , x)$ を用いて積分方程式に変換する：

$$(3.2) \qquad \varphi = \varphi_0 + D^* V \varphi$$

$$(3.3) \qquad D(t, x) = \frac{1}{2r}\delta(r-t) \quad (t>0) ; = 0 \ (t<0) \quad (r = |x|) .$$

ここに $*$ は convolution (t , x に関して) を意味する。$D * V\varphi$ を計算すると

(3.4)
$$\begin{aligned} D*V\varphi(t,x) &= \int_{R^3} (V\varphi)(t-|y|,x-y)\,|2y|^{-1}dy \\ &= \int_{R^3} V(x-y)\,\varphi(t-|y|,x-y)\,|2y|^{-1}dy \end{aligned}$$

となる。そこでYを

(3.5)
$$\|u\|_Y = \sup_x \int |u(t,x)|\,dt$$

をnorm とするBanach 空間とする。すると $\|D*V\varphi\|_Y$は (3.4) によって

(3.6)
$$\|D*V\varphi\|_Y \leq \sup_x \frac{1}{2}\int_{R^3} |V(y)|\,|x-y|^{-1}dy\, \|\varphi\|_Y \equiv c\,\|\varphi\|_Y$$

となることがわかる。$c<1$ならば逐次近似によって (3.2) を解くことは通例の如くすればよい。

しかし上の議論は L_2 理論の枠内には入らない。L_2 理論を展開しようとすれば，更に少し立入った議論が必要となるが，それについては〔1〕を見られたい。結論としては．$c<1$ でVが遠方で十分早く0に近づくならばwave operators の存在がいえる。勿論これはlinear theory の枠内で取扱える問題であって，その場合には $c<1$ なる条件は不要である（このことについても〔1〕に触れてある）。